Chapitre 5
OPERATIONS SUR LES V.A.R. ET CALCULS DE LOIS

5.1 V.A.R. DISCRETES.

Soit X une v.a.r. discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On pose $X(\Omega) = \{xi ; i \in \mathbb{N}\}$ (le cas fini est similaire au cas infini dénombrable et présente moins de difficultés ; on traitera donc uniquement le cas dénombrable).

5.1.1 Espérance.

Définition 5.1 : On dit que X possède une **espérance** si la série $\sum_{n\geq 0}|x_n|P([X = x_n])$ converge ; on appelle alors espérance de X et on note IE(X) le nombre défini par :

$$IE(X) = \sum_{n\geq 0} x_n P([X = x_n])$$

Remarques :

1) Si $X(\Omega)$ est fini, X possède toujours une espérance (la somme d'un nombre fini de termes est toujours finie).

2) Une v.a.r. discrète peut ne pas avoir d'espérance

EXEMPLES D'ESPERANCES DE V.A.R. AYANT DES LOIS CLASSIQUES :

On reprend ici les lois évoquées au Chapitre 3.

a) Loi de Bernoulli B(p) (ou B(1, p)) :

$X(\Omega) = \{0, 1\}$; $P([X = 1]) = p$; $P([X = 0]) = 1 - p$;

$$IE(X) = p.$$

En effet, $IE(X) = 0 \times P([X = 0]) + 1 \times P([X = 1]) = p$.

b) Loi binomiale $B(n, p)$:

$X(\Omega) = \{0, \cdots, n\}$; $P([X = k]) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ pour tout $k \in X(\Omega)$.

$$IE(X) = np.$$

c) Loi géométrique sur IN* $\mathcal{G}(p)$ *(ou P(1, p))* :

$X(\Omega) = \mathbb{N}*$; $P([X = k]) = p(1-p)^{k-1}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

$$IE(X) = \frac{n}{p}$$

d) Loi de Poisson P(λ) :

$$X(\Omega) = IN \ ; \ P([X = k]) = \exp(-\lambda)\frac{\lambda^k}{k!} \text{ pour } k \in IN.$$

$$IE(X) = \lambda$$

5.1.2 Moments d'ordre *r*.

Définition 5.2 : i) On appelle **moment d'ordre** *r* de *X* le nombre $m_r(X)$ défini par

$$m_r(X) = \sum_{n\geq 0} (x_n - IE(X))^r P([X = x_n])$$

pourvu que cette série converge absolument.

iii) On appelle **variance** de *X* et on note var(*X*) le moment centré d'ordre 2 : $\mu_2(X)$

iv) Si *X* admet une variance, on appelle **écart-type** de *X* le nombre σ(*X*) défini par

$\sigma(X) = \sqrt{var(X)}$

Remarque : $IE(X) = m_1(X) \ \ \mu_1(X) = 0$

Attention : Souvent, c'est le moment d'ordre *r* qui est noté $\mu_r(X)$ au lieu de $m_r(X)$ et dans ces cas, il n'y a pas de notations spécifiques pour le moment centré.

Propriété 5.1 : Si *X* est d'ordre *r*, les moments et les moments centrés d'ordre $k \leq r$ existent.

Exemple : Si *X* suit la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$

$$m_k(X) = 0^k P([X = 0]) + 1^k P([X = 1]) = p$$

5.1.3 Calcul de $IE(\varphi(X))$

Soit φ : IR → IR une fonction numérique quelconque. L'application $Y = \varphi(X)$: Ω → IR est encore une v.a.r. discrète. En effet, $\varphi(X)(\Omega) = \varphi(X(\Omega))$ est dénombrable car c'est l'image par φ d'un ensemble dénombrable et, pour tout $y_n \epsilon \varphi(X(\Omega))$, si $I_n = \{i \ ; \ \varphi(x_i) = \ y_n \ où \ x_i \epsilon X(\Omega)\}$, alors $[\varphi(\mathrm{X}) = y_n] = \cup_{i\epsilon I_n}[X = x_n]$ est dans la tribu $\mathscr{A}$, comme réunion dénombrable d'éléments de $\mathscr{A}$.

Théorème 5.1 : Soit φ une fonction de IR dans IR telle que $\varphi(X) = y_n$ admette une espérance. Alors :

$$IE(\varphi(X)) = \sum_{n\geq 0} \varphi(x_n)P([X = x_n])$$

Remarque : Ce théorème est l'un des plus importants : il permet en effet de calculer $IE(\varphi(X))$ sans connaˆıtre la loi de $\varphi(X)$ mais en connaissant simplement la loi de *X*.

Conséquences :

1) $IE(aX + b) = a\mathrm{IE}(X) + b$ si IE(*X*) existe. En effet, si $X(\Omega) = \{x_n\}$,

$$IE(aX + b) = \sum_n (ax_n + b)P([X = x_n]) = a\sum_n x_n P([X = x_n]) + b\sum_n P([X = x_n])$$

$$\mathrm{IE}(aX + b) = a\mathrm{IE}(X) + b$$

2) $\mathrm{var(X)} = IE(X^2) - IE(X)^2$. En effet, en posant $m = \mathrm{IE}(X)$,

$$\mathrm{var(X)} = IE((X - \mathrm{m})^2) = \sum_n (x_n - m)^2 P([X = x_n])$$

$$= IE(X^2 - 2mX + m^2) = \sum_n ({x_n}^2 - 2mx_n + m^2)P([X = x_n])$$

$$= \sum_n {x_n}^2 P([X = x_n]) - 2m\sum_n x_n P([X = x_n]) + m^2 \sum_n P([X = x_n])$$

$$IE(X^2) - 2m\mathrm{IE}(X) + m^2 = IE(X^2) - IE(X)^2$$

3) $\mathrm{var}(aX + b) = a^2\mathrm{var(X)}$. En effet,

$$\mathrm{var}(aX + b) = IE(((aX + b) - IE(aX + b))^2)$$

$$IE(((aX + b - (a\mathrm{IE}(X) + \mathrm{b}))^2) = IE((aX + b - a\mathrm{IE}(X) - \mathrm{b})^2)$$

$$IE(a^2\left(X - \mathrm{IE}(X)\right)^2) = a^2 IE(\left(X - \mathrm{IE}(X)\right)^2) = a^2\mathrm{var(X)}$$

Application aux lois classiques :

a) Loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$:

$X(\Omega) = \{0, \cdots, n\}$ et, pour $k \in X(\Omega)$, $P([X = k]) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

$$\mathrm{IE}(X) = np \; ; \; \mathrm{var}(X) = np(1 - p).$$

b) Loi géométrique sur IN* $G(p)$:

$X(\Omega) = \mathrm{IN}^*$ et, pour tout $k \in X(\Omega)$, $P([X = k]) = p(1-p)^{k-1}$.

$$\mathrm{IE}(X) = \frac{1}{p} \; , \; \mathrm{var(X)} = \frac{1-p}{p^2}$$

c) Loi de Poisson $P(\lambda)$:

$X(\Omega) = IN$; $P([X = k]) = \exp(-\lambda)\frac{\lambda^k}{k!}$ pour $k \in IN$.

$IE(X) = \lambda$; $var(X) = \lambda$

5.2 V.A.R. ABSOLUMENT CONTINUES.

1- Moments d'une v.a.r. absolument continue.

Définition 5.3 : Soit X une v.a.r. absolument continue, de densité f_X

i) Soit $r \in IN^*$. On appelle **moment d'ordre** r de X et on note $m_r(X)$ le réel défini par : $m_X(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^r f_X(t)dt$, pourvu que cette intégrale converge absolument.

ii) En particulier, on appelle **espérance** de X, le moment d'ordre 1 de X, s'il existe.

iii) Si X admet une espérance, on appelle **moment centré d'ordre** r de X le moment d'ordre r, s'il existe, de X - IE(X). On le note $\mu_r(X)$

iv) En particulier, si $\mu_2(X)$ existe, $\mu_2(X)$ est appelé **variance** de X et noté var(X). Si X admet une variance, on appelle **écart-type** de X le nombre $\sigma(X)$ défini par $\sigma(X) = \sqrt{var(X)}$.

Propriétés 5.2 :

1) Soit X une v.a.r. de densité f_X admettant une espérance et soit $(a, b) \in IR^* \times IR$.
Alors aX + b admet une espérance et IE(aX + b) = aIE(X) + b.

2) Si $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)dx$ converge, alors X^2 admet une espérance et

$$IE(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)dx$$

Plus généralement, on admet le théorème suivant :

Théorème 5.3 : Soit X une v.a.r. absolument continue de densité f_X et φ une fonction numérique continue et dérivable sur $X(\Omega)$, alors $\varphi(X)$ est une v.a.r. absolument continue et, si elle admet une espérance, alors

$$IE(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(X) f_X(x)dx$$

Conséquences :

1) $m_r(X) = IE(X^r)$

2) On retrouve $IE(aX + b) = \int_{-\infty}^{+\infty}(at + b)f_X(t)dt = a\mathrm{IE}(X) + b$

3) var(X) $= IE(X^2) - IE(X)^2$. En effet, en posant m = IE(X),

$$\text{var}(X) = IE((X - \text{m})^2) = IE(X^2 - 2mX + m^2) = IE(X^2) - 2m\mathrm{IE}(X) + m^2$$
$$= IE(X^2) - IE(X)^2$$

4) $\text{var}(aX + b) = a^2\text{var}(X)$. En effet,

$$\text{var}(aX + b) = IE(((aX + b) - IE(aX + b))^2)$$

$$IE(((aX + b - (a\text{IE}(X) + \text{b}))^2) = IE((aX + b - a\text{IE}(X) - \text{b})^2)$$

$$IE(a^2\left(X - \text{IE}(X)\right)^2) = a^2 IE(\left(X - \text{IE}(X)\right)^2) = a^2\text{var}(X)$$

Application aux lois classiques :

a) Loi uniforme $U([a, b])$ **:**

loi de densité f_X définie par $f(x) = \frac{1}{\text{b}-\text{a}} \mathbb{1}_{]a,b[}(x)$

$$\text{IE}(X) = \frac{a+b}{2} \text{ , var}(X) = \frac{a-b}{12}$$

b) **Loi exponentielle** $\mathcal{E}(\lambda)$ **:**

Loi de densité f définie par $f(x) = \lambda\exp(-\lambda x)\ \mathbb{1}_{]0, +\infty[}(x)$

$$\text{IE}(X) = \frac{1}{\lambda} \text{ , var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

c) **Loi Normale** $N(m, \sigma^2)$ **:**

Loi de densité f définie par $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$

$$\text{IE}(X) = m \text{ ; var}(X) = \sigma^2$$